

الحساب التكاملي

Calcul Intégrale

تمرين 1

احسب التكامل I في كل حالة من الحالات التالية:

$$I = \int_1^2 (2x^3 + x^2 - 2x - 1) dx \quad (1)$$

$$I = \int_{-1}^3 (2x+1)(x^2+x-4)^2 dx \quad (2)$$

$$I = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} dx \quad (4) \quad I = \int_7^{\sqrt{7}} x\sqrt{2x^2+2} dx \quad (3)$$

$$I = \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{5x^2-6x+2}{2x^2-3x+1} dx \quad (5) \quad \text{لاحظ وجود ثلاثة أعداد$$

حقيقية a, b, c ، بحيث من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$x > 1 \text{ فإن: } \frac{5x^2-6x+2}{2x^2-3x+1} = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{2x-1}$$

$$I = \int_0^3 (|x-2|-1) dx \quad (6) \quad \text{(استعمل علاقة شال)}$$

$$I = \int_{-1}^1 \frac{\sin 3x}{x^2+1} dx \quad (8) \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin 2x) dx \quad (7)$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^4 x dx \quad (9) \quad \text{(يمكن كتابة } \cos^4 x \text{ بدلالة } \cos 4x$$

و $\cos 2x$ باستعمال العبارة الخطية $2\cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$).

$\frac{3\pi}{16}$	0	2	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{4}(5 - \ln 3 + 5 \ln 2)$	$\ln 2$	-156	192	$\frac{35}{6}$
-------------------	---	---	----------------	------------------------------------	---------	------	-----	----------------

تمرين 2

باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب التكامل I في كل حالة:

$$I = \int_0^{\pi} (x+1) \sin x dx \quad (2) \quad I = \int_{-2}^0 (x+3)e^x dx \quad (1)$$

$$I = \int_1^2 \ln \frac{x}{x+1} dx \quad (4) \quad I = \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx \quad (3)$$

$$I = \int_{-1}^0 (2x^2+3x)e^{-x} dx \quad (6) \quad I = \int_1^e x^n \ln x dx \quad (5)$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin x dx \quad (8) \quad I = \int_1^e (\ln x)^2 dx \quad (7)$$

$\frac{1}{2}$	$e-2$	$2e-7$	$\frac{ne^{n+1}+1}{(n+1)^2}$	$4\ln 2 - 3\ln 3$	$\frac{4}{15}$	$\pi+2$	2
---------------	-------	--------	------------------------------	-------------------	----------------	---------	---

تمرين 3

f دالة معرفة بـ: $f(x) = x\sqrt{-2x+5}$ ، و g دالة معرفة بـ:

$$g(x) = (ax^2+bx+c)\sqrt{-2x+5} \quad \text{على }]-\infty; \frac{5}{2}]$$

1- عيّن الأعداد الحقيقية a, b, c بحيث من أجل كل

$x < \frac{5}{2}$ تكون الدالة g دالة أصلية للدالة f .

2- استنتج حساب التكامل التالي: $I = \int_{-2}^2 f(x) dx$

3- احسب القيمة المتوسطة μ لـ f على $[-2; 2]$.

$-\frac{19}{30}$	$-\frac{38}{15}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$
------------------	------------------	----------------	----------------	---------------

تمرين 4

f الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \ln(1+e^x) - x$

1- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ثم شكّل جدول تغيّرات f .

2- استنتج أنه من أجل كل $x \geq 0$ ، $0 \leq f(x) \leq \ln 2$.

3- استنتج حصراً سعته 0,5 للعدد $I = \int_{\ln 2}^{2\ln 2} \ln(1+e^x) dx$.

$$0,7 \leq I \leq 1,2$$

تمرين 5

بكالوريا بتصرف

f الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{2\ln x}{x^2+x}$

1- بين أنه من أجل كل $x > 1$ ، $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$.

2- أ) احسب $I = \int_2^4 \frac{\ln x}{x} dx$ و $J = \int_2^4 \frac{\ln x}{x^2} dx$ (يمكن استعمال المكاملة بالتجزئة لحساب J).

ب) استنتج حصراً للعدد K حيث: $K = \int_2^4 f(x) dx$.

$$\frac{1}{4} < K < \frac{3(\ln 2)^2}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{3(\ln 2)^2}{2}$$

تمرين 6

n عدد طبيعي. نعتبر التكامل: $I_n = \int_0^1 x^n \sin \pi x dx$

1- ادرس تغيّرات المتتالية (I_n) .

2- احسب I_0 و I_1 .

3- أوجد علاقة بين I_n و I_{n-2} . (كامل بالتجزئة مرتين)

4- استنتج حساب قيمتي I_2 و I_3 .

$$\frac{1}{\pi} - \frac{6}{\pi^3} \quad \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3} \quad I_n = \frac{1}{\pi^2} [\pi - n(n-1)I_{n-2}] \quad \frac{1}{\pi} \quad \frac{2}{\pi}$$